

文章编号:1000-8055(2011)05-1017-08

一种基于谱方法的三维热声不稳定模型

李 磊, 孙晓峰

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 研究流体的流动参数,包括热源热释放的周向不均匀分布对热声不稳定现象的影响,将欧拉方程进行线化处理之后,对轴向和径向方向进行基于切比雪夫多项式的谱离散,周向方向则进行基于傅里叶多项式的谱离散,建立了一种三维热声不稳定数值模型.通过对圆柱管道共振频率以及声场的求解,进行了一系列算例的验证,证实了该方法的可靠性,并且通过热释放温度周向非均匀的算例,证实了某些周向对称分布参数下,可以使用截面平均的集总参数来代替非均匀分布参数;而在非对称的分布情况下,当周向不均匀分布很强烈的时候,这种使用截面平均参数的近似算法会带来偏差.

关 键 词: 周向非均匀; 热声不稳定; 谱方法; 共振频率; 线化欧拉方程

中图分类号: V231.3

文献标志码: A

Three-dimensional thermoacoustic instability model based on spectral method

LI Lei, SUN Xiao-feng

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: In order to investigate the effect of circumferential non-uniform fluid parameters and heat release on thermoacoustic instabilities, Chebyshev method was applied to axial and radial directions and Fourier method was applied to circumferential direction in the linear Euler equations. Resonant frequencies and acoustic fields of a duct were obtained by this method for validation and further investigations. At last, after some calculation for circumferential non-uniform heat release, it is verified that some symmetrical circumferential non-uniform conditions can be simplified to uniform conditions. But this approximation would bring errors if the circumferential non-uniform distribution is strong in case of asymmetrical distribution.

Key words: circumferential non-uniform; thermoacoustic instability; spectral method; resonant frequency; linear Euler equations

在燃气轮机中,为了降低 NO_x 等污染物排放,贫油预混燃烧模式被广泛采用.这带来一个问题,就是燃烧不稳定的发生.这是一种由于热、声相互耦合而产生的自激振荡.燃烧室的固有频率和不稳定热释放频率相耦合之后,相应模态就会变得不稳定,反过来会加剧不稳定热释放,从而最终形成大幅度的脉动^[1].此外,以燃烧不稳定作为

表现形式的这种热声耦合现象,还会发生于火箭发动机、弹用冲压发动机以及航空发动机加力燃烧室当中,此现象经常导致结构的破坏,引起严重后果^[2-3].国内外进行了大量的工作,对这种基于热声不稳定的现象进行了机理研究以及抑制方法上的探索.

为了研究热声不稳定现象的机理,在理论方

收稿日期:2010-12-08; 修订日期:2011-03-24

基金项目:国家自然科学基金(50890181); 航空科学基金(2009ZB51)

作者简介:李磊(1981—),男,河北乐亭人,博士生,主要从事燃烧不稳定的数值以及实验方法研究.

面,人们发展了一些模型方法以及数值模拟方法来预测热声不稳定的发生.值得指出的是,相比直接的数值模拟方法,模型方法,是一种更简洁、有效、快速的数值方法,在工程方面应用广泛,且其更利于去理解热声不稳定这种现象的物理机制. Dowling^[4]在1995年发表的工作中,在一维的线化声学模型的基础上,系统地总结了热声不稳定系统共振频率的计算方法,并且从计算上给出了系统各个参数,诸如有无流动、流动 Ma 、热释放强度、温度分布等等对系统共振频率的影响情况. Akamatsu 和 Dowling^[5]在2001年的工作中给出了一个三维热声不稳定模型.这个模型的发展也是基于线性声学理论,其认为系统中线性模态均正比于 $e^{i\omega t + im\theta}$, m 为周向模态数, i 为虚数单位.这个三维模型可以考虑径向、周向这些和平面波相比更高频的不稳定振荡. You, Sun 和 Yang^[6]也于2003年基于模态匹配方法建立了三维热声不稳定模型,可以考虑复杂形状,轴向存在温度梯度等情况的不稳定问题.

上述所有方法,不管是一维还是三维模型,其共有的一个前提就是,主流为一维流动,即流动参数在周向以及径向方向不能存在不均匀分布.而现在常见的环形燃烧室,喷嘴沿周向的布局,不但会对流动产生周向的不均匀阻碍,而且热释放本身也会存在周向的不均匀性.现有的几种模型方法均不能给出这种不均匀会如何影响燃烧不稳定现象的发生.当流动存在周向不均匀,线化声场的三维模态展开形式不再适用,为了研究这个问题,必须从最基本的线化欧拉方程出发.在离散方法上,选择了基于切比雪夫-傅里叶多项式的谱方法.谱方法作为一种精度高、收敛速度快的全局化数值方法,广泛地应用于解决流体^[7-9]以及其他力学方面的问题^[10-12].

本文首先给出了针对热声不稳定问题的三维线化欧拉方程.接着给出了周向、径向基于切比雪夫多项式离散以及周向基于傅里叶多项式离散的谱方法基本方程,然后讨论了不稳定热释放处理方法以及边界条件处理方法,给出了一些算例验证.最后,给出了一些沿周向有不均匀热释放的算例.

1 针对本问题的基本方程

对一般情况,考虑有质量源以及热源存在的连续、动量以及能量方程

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = q_m(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \bar{p} = 0 \quad (2)$$

$$\bar{\rho} \tilde{T} \frac{d\tilde{s}}{dt} = q_h(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

其中 $\rho, \mathbf{v}, s, T$ 分别为密度、速度、熵以及温度,上标 $\sim$ 表示为总量(为了和脉动量区分), q_m 为单位体积的质量输入, q_h 为单位体积的热量输入.将上述方程结合状态方程,并且线化,可以得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} v) = q'_m \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + \bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{v} \cdot \nabla v + \bar{\rho} v \cdot \nabla \bar{v} + \nabla p = 0 \quad (5)$$

$$- \bar{c}^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - \bar{c}^2 \bar{v} \cdot \nabla \rho + \frac{\bar{c}^2}{\bar{\rho}} \rho \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{\bar{\rho}} \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{\rho} + v \cdot \nabla \bar{p} - \bar{c}^2 v \cdot \nabla \bar{\rho} + \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla p - \frac{\gamma}{\bar{\rho}} p \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \frac{\gamma}{\bar{\rho}} p \bar{v} \cdot \nabla \bar{\rho} = (\gamma - 1) q'_h \quad (6)$$

其中 ρ, v, p 分别为密度、速度以及压力脉动量(线化量,以下均称为脉动量),上标诸如 $\bar{\rho}$, 表示平均量, c 为声速, q'_m 和 q'_h 表示质量以及热量不稳定输入源.如果平均量,即主流流动参数以及 q'_m 和 q'_h 均为已知,可以根据上述方程来研究一个系统的热声不稳定问题.

把扰动的时间相关量表示成复频率的形式,即: $\rho = \bar{\rho} e^{i\omega t}$, $p = \bar{p} e^{i\omega t}$, $v = \bar{v} e^{i\omega t}$, 其中 ω 为复数角频率, $\omega = \omega_r + \omega_i i$. 其实部 ω_r 代表了实际的物理频率,而虚部 ω_i 反应了对应的该模态的增长或衰减情况.如果 $\omega_i > 0$, 那么该模态的能量耗散大于能量的获取,于是系统中对应的该模态就是稳定的;相反,如果 $\omega_i < 0$, 那么系统中该模态就是不稳定的,表现在实际中就是大幅度的压力以及速度脉动.通过求解复频率,就能够得到系统的频率特性以及稳定性情况.应用上述关系,且不考虑主流的非定常效果,那么

$$i\omega \rho + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} v) = q'_m \quad (7)$$

$$\rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + i\omega \bar{\rho} v + \bar{\rho} \bar{v} \cdot \nabla v + \bar{\rho} v \cdot \nabla \bar{v} + \nabla p = 0 \quad (8)$$

$$\left[-i\omega \bar{c}^2 + \frac{\bar{c}^2}{\bar{\rho}} \bar{v} \cdot \nabla \bar{\rho} \right] \rho - \bar{c}^2 \bar{v} \cdot \nabla \rho + v \cdot \nabla \bar{p} - \bar{c}^2 v \cdot \nabla \bar{\rho} + \left[i\omega - \frac{\gamma}{\bar{\rho}} \bar{v} \cdot \nabla \bar{\rho} \right] p + \bar{v} \cdot \nabla p = (\gamma - 1) q'_h \quad (9)$$

在柱坐标系 (x, r, θ) 下将上述方程展开, 并且不考虑切向以及径向流动(实际上, 对于仅研究周向流动参数分布不均匀, 略掉切向以及径向流动是可行的. 如果需要研究切向和径向流动的作用, 加上这两个参数, 对本模型方法以及计算量的影响不大, 在本文中将其简化掉了).

$$A_1 \rho + A_2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + A_3 \frac{\partial v_r}{\partial r} + A_4 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + A_5 \frac{\partial v_x}{\partial x} + A_6 v_r + A_7 v_\theta + A_8 v_x = q'_m \quad (10)$$

$$B_1 v_r + B_2 \frac{\partial v_r}{\partial x} + B_3 \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (11)$$

$$C_1 v_\theta + C_2 \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + C_3 \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (12)$$

$$D_1 \rho + D_2 v_x + D_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} + D_4 v_r + D_5 v_\theta + D_6 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

$$E_1 \rho + E_2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + E_3 v_r + E_4 v_\theta + E_5 v_x + E_6 p + E_7 \frac{\partial p}{\partial x} = (\gamma - 1) q'_h \quad (14)$$

上述 5 个方程即为基本方程, 其中, 5 个未知变量为 $\rho, v_x, v_r, v_\theta, p$, 而系数 A_n, B_n, C_n, D_n, E_n 包含了平均流动参数以及复频率 ω , 限于篇幅, 这里不一一列出了.

2 谱方法基本方程

谱方法, 包括 Galerkin, Tau, 以及配置法, 是以加权余量方法为基础的求解微分方程的一种方法. 其核心思想在于, 将未知函数写成关于基函数的线性组合的形式, 比如

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \varphi_k(x) \quad (15)$$

其中 $u_N(x)$ 为未知函数, 而 $\varphi_k(x)$ 为基函数. 做为一种成熟的数值方法, 原理不过多讨论. 在径向以及轴向采取了切比雪夫多项式的基函数, 切比雪夫多项式是定义在 $[-1, 1]$ 上的

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

这里, 并非要求解未知系数 $\hat{u}_k$, 而是采取直接将未知函数在选取点上的函数值做为未知量的配置法. 一般来说, 在 $[-1, 1]$ 上选取 $N+1$ 个配置点

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{N} \quad (17)$$

通过 Lagrange 插值公式, 将公式写成未知函数配置点上的函数值的组合表达式

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^N h_j(x) u(x_j) \quad (18)$$

其中 $h_j(x)$ 为 Lagrange 插值多项式. 对于周向, 其相应的傅里叶基函数的形式为

$$F_k = e^{ikr}, \quad k = -K, K \quad (19)$$

配置点的选取为

$$x_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1, N \quad (20)$$

同样的, 周向也采取配置点上未知函数值为未知量的配置方法.

实际上, 对于微分方程求解问题, 关键在于偏微分项的离散. 不同于差分方法, 谱方法对于偏微分项的离散是全局化的. 这里, 直接给出最后的形式, 具体见文献[13]. 对于本文要处理的三维问题, 将 5 个未知量 $\rho, v_x, v_r, v_\theta, p$ 写成

$$\chi(x, r, \theta) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_\theta} F_{ijk} T_i(x) T_j(r) e^{ik\theta} \quad (21)$$

其中 χ 表示未知量 $\rho, v_x, v_r, v_\theta, p$. 从而各未知量偏微分的离散形式为

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial x} \right|_{i,j,k} = \chi_x^1(x_i, r_j, \theta_k) = \sum_{m=0}^{N_x} d_{i,m}^1 \chi(x_i, r_j, \theta_k) \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{i,j,k} = \chi_r^1(x_i, r_j, \theta_k) = \sum_{n=0}^{N_r} d_{j,n}^1 \chi(x_i, r_j, \theta_k) \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right|_{i,j,k} = \chi_\theta^1(x_i, r_j, \theta_k) = \sum_{p=1}^{N_\theta} e_{k,p}^1 \chi(x_i, r_j, \theta_k) \quad (24)$$

其中系数矩阵 $d_{i,m}^1$ 以及 $e_{k,p}^1$ 的形式参见文献[13].

3 不稳定热释放以及边界条件处理

在方程以及方程中, 存在两个源项. 其中, 在本文的计算中, 省略 q'_m , 只考虑 q'_h 的作用. 在实际中, q'_h 沿轴向方向以及径向轴向会存在一个分布. 而为了方便计算, 人们在模型当中均将其简化成一个面源的存在, 成为一个间断面. 而谱方法本身无法捕捉到这种间断, 故必须对其进行分区求解. 对于区域间的匹配, 通过守恒关系给出, 如图 1 和图 2 所示.

通过质量连续、动量连续以及能量连续, 给出

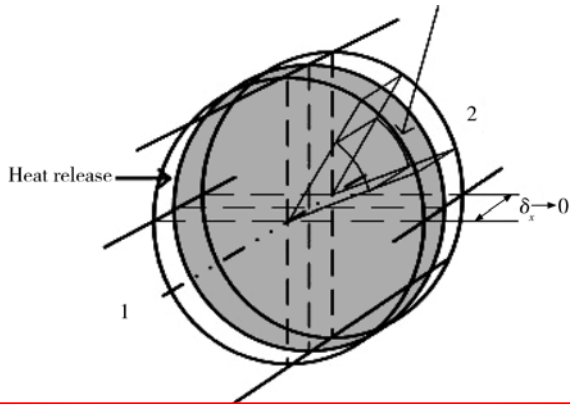


图1 分区域示意图

Fig. 1 Two domain decomposition

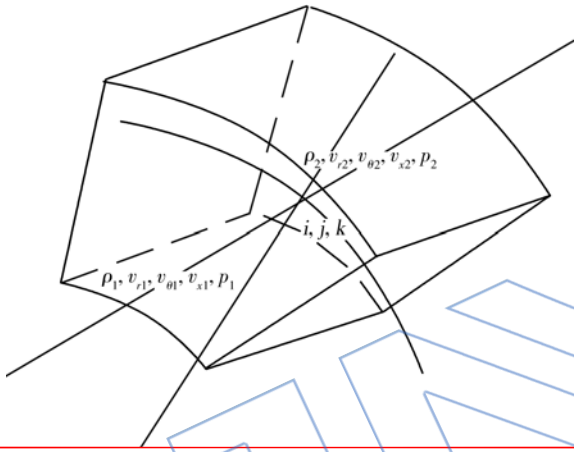


图2 匹配关系示意图

Fig. 2 Matching relations

5个匹配关系,直接给出结果

$$\bar{\rho}_1 v_{xA} + \bar{v}_{x1} \rho_A = \bar{\rho}_2 v_{xB} + \bar{v}_{x2} \rho_B \quad (25)$$

$$p_A + \rho_A \bar{v}_{x1}^2 + 2\bar{\rho}_1 \bar{v}_{x1} v_{xA} = p_B + \rho_B \bar{v}_{x2}^2 + 2\bar{\rho}_2 \bar{v}_{x2} v_{xB} \quad (26)$$

$$\bar{\rho}_1 \bar{v}_{x1} v_{xA} = \bar{\rho}_2 \bar{v}_{x2} v_{xB} \quad (27)$$

$$\bar{\rho}_1 \bar{v}_{x1} v_{\theta A} = \bar{\rho}_2 \bar{v}_{x2} v_{\theta B} \quad (28)$$

$$Q' + (c_p \bar{T}_{01} \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1 \bar{v}_{x1}^2) v_{xA} + (c_p \bar{T}_{01} \bar{v}_{x1} - c_p T_1 \bar{v}_{x1}) \rho_A + \frac{c_p \bar{v}_{x1}}{Rg} p_A = (c_p \bar{T}_{02} \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_2 \bar{v}_{x2}^2) v_{xB} + (c_p \bar{T}_{02} \bar{v}_{x2} - c_p T_2 \bar{v}_{x2}) \rho_B + \frac{c_p \bar{v}_{x2}}{Rg} p_B \quad (29)$$

其中下标 A 表示左侧界面上的点,下标 B 表示右侧界面上的点, $\bar{T}_{01}$ 为总温。

关于边界条件,针对不同形式的问题会有不同的边界条件。比如,对于左右端面,全反射或者

一定的阻抗边界条件,而对于侧壁面,硬壁面需要给出全反射的边界条件,阻抗壁面同样需要给出相应的阻抗边界条件。

将方程(10)~(14)通过式(22)~(24)离散化,结合上述的匹配条件以及边界条件,得到下面形式的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_3 \\ \zeta_4 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

其中

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \vdots \\ \xi_{1N} \end{bmatrix}, \quad \xi_{10} = \begin{bmatrix} \rho_1(0,0,1) \\ v_{r1}(0,0,1) \\ v_{\theta1}(0,0,1) \\ v_{x1}(0,0,1) \\ p_1(0,0,1) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} & \cdots & \Pi_{0N} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} & \cdots & \Pi_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{N0} & \Pi_{N1} & \cdots & \Pi_{NN} \end{bmatrix} \quad (32)$$

式中 ξ_2, ξ_3, ξ_4 有类似的形式。若线性方程组(30)有确定解,那么行列式

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_3 \\ \zeta_4 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

上述行列式含有唯一的未知参数就是复频率 ω 通过求解上述方程得到 ω ,得出系统的稳定性情况。

4 算例

4.1 无热释放两端开口圆管共振频率计算

首先,针对一个两端开口,中间热释放为0,长度为2,半径为2,流动均匀的圆管情况进行了计算。流动参数分别为:马赫数 $Ma=0.015$,温度 $T_0=288\text{ K}$,压力 $p_0=100\text{ kPa}$ 。表1为本方法计算得到的各模态共振频率和解析解的对比。

表1 共振频率对比情况(单位:Hz)

Table 1 Resonant frequency (unit:Hz)

	模态数		
	1×0×0	1×1×0	1×1×1
本方法	534.270	842.868	1053.96
解析解	534.265	842.704	1052.47

在表1当中,模态数 $i \times j \times k$, i 表示轴向的模态, j 表示径向模态数, k 表示周向模态数。表中第一行为本方法计算得到的结果,第二行为解析

解,结果发现,周向1阶模态的情况下误差相对偏大,因为高阶模态的计算需要相对更密集的网格点,因此对精度的要求更高。

4.2 一维不稳定热释放管道算例验证

在文献[4]中,Dowling给出了有不稳定热释放和均匀流动的一维管道的共振频率计算方法。对本算例进行了计算,并且和Dowling的结果进行了对比。其算例中,左端为阻塞条件,即质量流量恒定,那么边界条件为

$$\frac{\rho_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{v_{x1}}{\bar{v}_{x1}} = 0 \quad (34)$$

右端开口,则边界条件为

$$p_2 = 0 \quad (35)$$

给出了两种热释放模型

$$Q'_1(t) = 0$$

$$Q'_2(t) = c_p(\bar{T}_{02} - \bar{T}_{01})(\bar{\rho}_1 u'_1 + \rho'_1 \bar{u}_1) \quad (36)$$

本方法计算结果和Dowling的计算结果对比见图3所示。

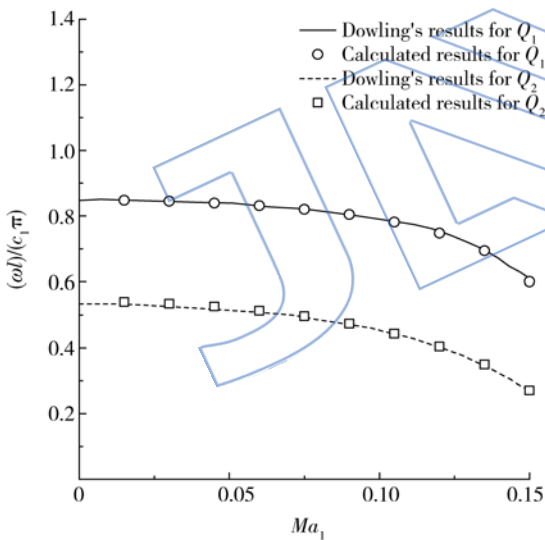


图3 有不稳定热释放的一维管道最低阶共振频率随进口马赫数变化情况

Fig. 3 Lowest frequency of oscillation as a function of inlet Mach number

可以发现,本方法计算得到的结果和Dowling的方法的结果吻合得很好。

4.3 周向正弦型的热源温度分布

Heckl^[14]给出过一个一维的Rijke tube模型。按照Heckl的模型,设计了一个周向存在不均匀热释放的算例。在长为2m,半径为0.2m,两

端开口的硬壁面管中,进口空气Ma为0.08,温度为288K,在距离左端口0.6m处,存在一个面热源,该热源周向温度分布为

$$T_w = T_{w0} + \Delta T \sin(k_w \theta) \quad (37)$$

其中 T_{w0} 为热源基础温度,计算中数值为761K, ΔT 为不均匀参数,其大小衡量了不均匀的程度。 k_w 在下面的算例中取1。按照Heckl给出的热释放公式,令 $\Delta T = 0$ 时热释放量 $Q_0 = 6 \times 10^5$ J,那么

$$Q(\theta) = \left[1 + \frac{\Delta T \sin(k_w \theta)}{T_{w0} - T_1} \right] Q_0 \quad (38)$$

根据上述热释放公式,当 $\Delta T = 0.1(T_{w0} - T_1)$,该热释放面源的分布如图4所示。

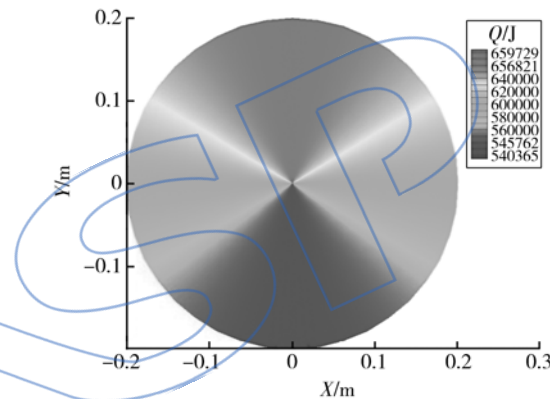


图4 热源热释放沿周向分布图

Fig. 4 Circumferential distribution of the heat release

通过守恒关系,得出空气流过热源之后的温度、流速以及压力分布。温度分布如图5所示。

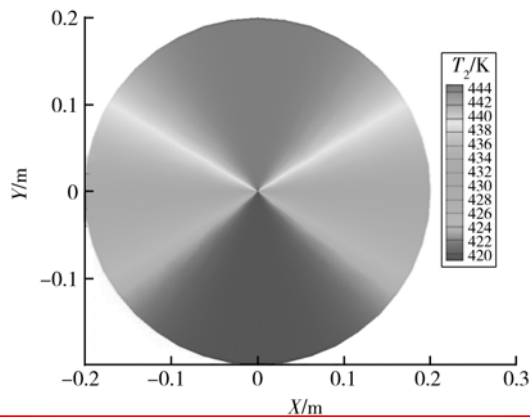


图5 热源后温度沿周向分布图

Fig. 5 Circumferential distribution of the temperature after the heat source

实际中,经过热源之后,空气周向的这种不均匀状况会随着流动以及换热很快地掺混而变得均匀,但不考虑周向以及径向流动,假设空气绝热,那么,上述的这种不均匀状态沿轴向不变。

由于管道两端开口,则进出口边界条件分别给出为

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0 \quad (39)$$

则在上述条件下,计算得到的系统共振频率随 $K_t = \Delta T / (T_{w0} - T_1)$ 的情况如表2所示。

由上面的结果发现,当 $K_t = 0$ 的时候,即周向温度分布均匀,复频率虚部为负,即系统此时为不稳定状态。而随着 K_t 增大,即周向温度分布不均匀的情况加剧,计算得到的复频率基本没有变化。这说明,算例中给出的这种正弦型热量不均匀分布,对系统稳定特性没有影响。上面只是一种较理想的情况,总的热释放量没有变化,且热释放时间延迟等参数固定,所以,这种情况下,系统的共振频率以及稳定特性不发生变化,是合理的。

4.4 周向非对称式的热源温度分布

上面的热源温度分布是正弦式的,温度分布的上下完全对称的结构,导致了系统稳定性以及

频率特性均不受影响。下面考虑非对称式的热源分布。假设

$$T_w = T_{w0} + \Delta T \cdot f(\theta) \quad (40)$$

$$f(\theta) = \begin{cases} K_p \sin(\theta) & \theta \in 0, \pi \\ \sin(\theta) & \theta \in \pi, 2\pi \end{cases} \quad (41)$$

若 $K_p = 1$,显然为上面的正弦型的分布;表3和表4为 $K_p = 2$ 和 $K_p = 3$ 情况下的结果。由这些结果可以发现,对于这种非对称性的热源分布,系统的共振频率以及反应不稳定特性频率虚部均随着不均匀的增强而发生变化。共振频率的变化幅度很明显,在 $K_p = 3$ 的时候,变化量在 16 Hz。反应系统不稳定特性的虚部的变化范围在 1.5 以内,对于上述的算例,虽然不均匀的情况已经很强烈,但是虚部的这种范围的变化,仍然不足以引起系统稳定特性的变化。

4.5 周向集总参数和分布参数的对比

在热源温度单纯的正弦分布的情况下,基本上可以用某种平均分布参数来大致地计算这种正弦分布的情况,这种平均分布参数,就是把整个面的总热释放沿截面平均,然后平均后的均匀参数

表2 正弦型温度分布下的共振频率(单位:Hz)

Table 2 Resonant frequency for sinusoidal temperature distribution (unit:Hz)

K_t	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
实部	590.057	590.062	590.075	590.097	590.127	590.165	590.211	590.264	590.324	590.389
虚部	-9.405	-9.404	-9.400	-9.342	-9.383	-9.372	-9.360	-9.349	-9.340	-9.334

表3 非对称式温度分布下的共振频率(单位:Hz) ($K_p = 2$)

Table 3 Resonant frequency for asymmetry temperature distribution (unit:Hz) ($K_p = 2$)

K_t	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
实部	590.057	590.839	591.640	592.451	593.274	594.106	594.947	595.799	596.657	598.389
虚部	-9.405	-9.511	-9.608	-9.693	-9.769	-9.838	-9.901	-9.962	-10.023	-10.15

表4 非对称式温度分布下的共振频率(单位:Hz) ($K_p = 3$)

Table 4 Resonant frequency for asymmetry temperature distribution (unit:Hz) ($K_p = 3$)

K_t	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
实部	590.057	591.619	593.198	594.787	596.382	597.986	599.599	601.271	602.850	604.483
虚部	-9.405	-9.616	-9.801	-9.965	-10.108	-10.24	-10.35	-10.42	-10.55	-10.63

计算出来的共振频率以及不稳定特性和热源温度正弦分布的基本相同.然而,对于上述的这种非对称的热源温度分布,用这种截面平均参数来计算系统的稳定特性呢?这种截面集总参数的方法,和不均匀的分布式参数,对结果的影响有多少?这种集总参数的处理方法,可以将计算简化成一维,而对于一维情况的处理要简单很多,计算量要小很多,计算精度也很容易实现.下面对 $K_p=2$ 和 $K_p=3$ 的情况进行了分布参数(distributed)和集总参数(lumped)的对比.对于式(40)和(41)给出的温度分布,可以求得截面总的热释放量,从而,截面的集总参数,诸如平均温度、平均流速等参数均可以获得.

$$Q_c = \int_0^{2\pi} \frac{Q(\theta)}{2\pi} d\theta = \left[1 + \frac{\Delta T(K_t - 1)}{\pi(T_{w0} - T_1)} \right] Q_0 \quad (42)$$

$$\beta_c = \left[1 + \frac{\Delta T(K_t - 1)}{\pi(T_{w0} - T_1)} \right] \beta_0 \quad (43)$$

图6为 $K_p=2$ 和 $K_p=3$ 的时候,在周向分布不均匀参数下和集总参数下系统共振频率的情况.可以发现,集总参数下计算得到的共振频率和分布不均匀参数下得到的共振频率差别不大,但是随着不均匀的增强,这种差别逐渐加大.图7为反映系统不稳定特性的复频率虚部的对比情况,随着不均匀的加强,集总参数下计算得到的结果和分布不均匀参数下的结果存在一定的偏差.由

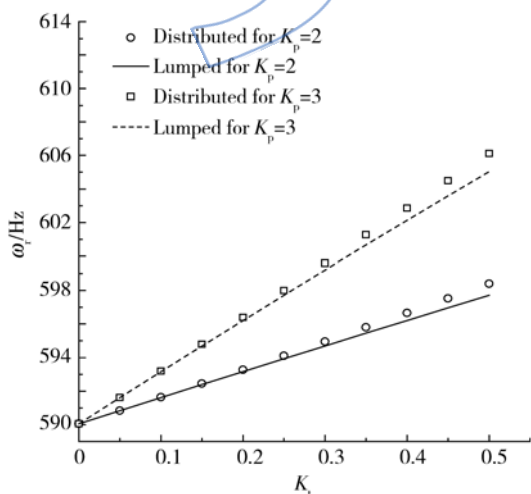


图6 周向集总参数和分布参数两种情况下的共振频率 ω_r 对比

Fig. 6 Real part of frequency of lumped parameter system and distributed system

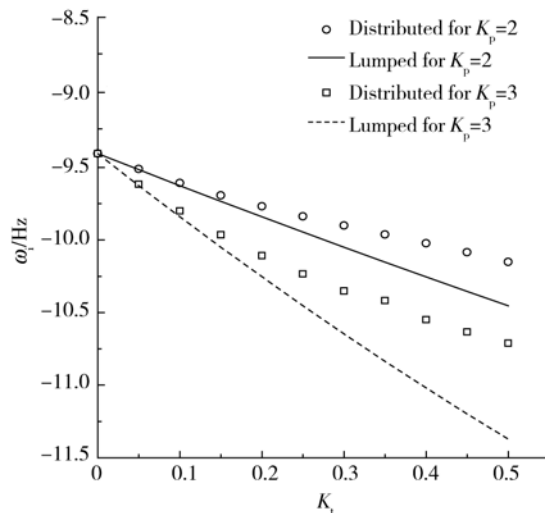


图7 周向集总参数和分布参数两种情况下的复频率虚部 ω_i 对比

Fig. 7 Imaginary part of frequency of lumped parameter system and distributed system

上述的计算,可以得出结论:在不均匀不是很强烈的情况下,或者说不均匀是一种沿周向对称型的分布(比如正弦型分布),那么这种情况下用一维的截面集总平均参数来计算系统的频率特性以及不稳定特性,是可以的.但是在有很强烈的非对称型的周向不均匀分布的话,用一维的截面集总平均参数来计算系统频率特性和不稳定特性,就会存在一定的偏差.

5 结 论

通过上述分析可以得出如下结论:

本方法对于一个热声不稳定系统的共振频率计算是可靠的,且计算中关于边界条件以及界面匹配条件,热释放间断的处理方式是合理的,能够以本方法为基础,进行非均匀情况的研究.通过热释放温度周向非均匀的算例,证实了某些周向对称分布参数下,可以使用截面平均的集总参数来代替非均匀分布参数;而在非对称的分布情况下,当周向不均匀分布很强烈的时候,这种使用截面平均参数的近似算法会带来偏差.

参考文献:

- [1] Zinn B T, Lieuwen T C. Combustion instabilities: basic concepts[M]// Lieuwen T C, Yang V. Combustion instabilities in gas turbine engines: operational experience, fundamental mechanisms, and modeling. Reston: Progress in Astronautics and Aeronautics, 2005: 3-26.

- [2] Culick F E C, Yang V. 液体火箭发动机燃烧不稳定综述 [M]//杨 V, 安德松 W E. 液体火箭发动机燃烧不稳定. 北京: 科学出版社, 2001: 3-30.
- [3] Oefelein J C, Yang V. Comprehensive review of liquid-propellant combustion instabilities in F-1 engines[J]. Journal of Propulsion and Power, 1993, 9(5): 657-677.
- [4] Dowling A P. The calculation of thermoacoustic oscillations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 180(4): 557-581.
- [5] Akamatsu S, Dowling A P. Three-dimensional thermoacoustic oscillation in a premix combustor[R]. ASME Paper 2001-GT-0034, 2001.
- [6] You D, Sun X, Yang V. Three-dimensional linear stability analysis of gas turbine combustion dynamics[M]//Lieuwen T C, Yang V. Combustion instabilities in gas turbine engines: operational experience, fundamental mechanisms, and modeling. Reston: Progress in Astronautics and Aeronautics, 2005: 415-444.
- [7] Alexander Y G. Implementation of arbitrary inner product in the global Galerkin method for incompressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 211(2): 511-530.
- [8] Alexander Y G. Different modes of Rayleigh-Benard instability in two and three-dimensional rectangular enclosures[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 156(2): 300-324.
- [9] Puigjaner D, Herrero J, Francesc G, et al. Stability analysis of the flow in a cubical cavity heated from below[J]. Physics of Fluids, 2004, 16(10): 3639-3655.
- [10] Bernard B, Andreas K. Spectral Chebyshev-Fourier collocation for the helmholtz and variable coefficient equations in a disk[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(19): 8588-8603.
- [11] Matsushima T, Marcus P S. A spectral method for polar coordinates[J]. Journal of Computational Physics, 1995, 120(2): 365-374.
- [12] Patrick G, Giora S. The dynamics of two-dimensional local and finite perturbations in envelopes of rotating white dwarfs[J]. Astrophysical Journal, 1995, 447: 797-806.
- [13] Peyret R. Spectral methods for incompressible viscous flow [M]. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [14] Heckl M A. Active control of the noise from a Rijke tube [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 124(1): 117-133.